www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه (سالی – واحدی)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۱۷	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت **دی ماه** سال ۱۳۸۳		کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید : $(n \in N)$ $(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\ldots\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$	۱/۵
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید ، مجموع مربعات دو عدد فرد ، یک عدد زوج است .	۱
۳	برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a و b و c ثابت کنید : $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$	۱
۴	می‌دانیم $\sqrt{3}$ عددی گنگ و a^2 یک عدد گویا است . ثابت کنید $a^2+\sqrt{3}$ عدد گنگ است. (برهان خلف)	۱
۵	S یک زیر مجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است . اگر اعضای S را بر ۳۰ تقسیم کنیم ، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده اند .	۱
۶	اگر $U=\{2,3,5,7,9,11,13\}$ و $A=\{3,5,7\}$ و $B=\{3,11,13\}$ ، مطلوب است : الف) A' ب) $(A\cap B)'$ پ) $A-B$ ت) $A\cup B$	۱/۵
۷	به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید : $(A\cup B)-B=A-B$	۱
۸	x و y را طوری تعیین کنید که زوجهای مرتب $(xy\ ,\ 24)$ و $(x^2-y^2\ ,\ 15)$ با هم مساوی باشند .	۱
۹	اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ نمودار رابطه‌ی رو به رو را رسم کنید. $aRb\Leftrightarrow a^2(b+1)\leq 10$ $a\ ,\ b\in A$	۱
۱۰	رابطه‌ی R در Z به صورت رو به رو تعریف شده است . $xRy\Leftrightarrow x^3+y=y^3+x$ ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی است .	۱
۱۱	هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۱۶ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت ها ، یکی را به طور تصادفی برمی داریم مطلوب است تعیین : الف)فضای نمونه ای این تجربهٔ تصادفی. ب)پیشامد A که درآن عدد روی کارت ، مضرب ۳ باشد. پ)پیشامد B که درآن عدد روی کارت ، یک رقمی باشد. ت)پیشامد $A\cap B$.	۲

ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه (سالی – واحدی)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۱۷	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت **دی ماه** سال ۱۳۸۳		کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	

۱۲	یک کیسه محتوی ۳ مهره سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است دو مهر ه با هم و به طورتصادفی بیرون می آوریم . مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه : الف) دو مهره همرنگ باشند . ب) یک مهره سفید و یک مهره سیاه باشد .	۱/۵
۱۳	یک جفت تاس را می اندازیم ، احتمال آنکه مجموع اعداد دو تاس بزرگتر از ۹ باشد را تعیین کنید.	۱
۱۴	فرض می‌کنیم $S=\{a,b,c\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم : $P(a)=\frac{۱}{۱۰}P(b)$ و $P(b)=\frac{۱}{۱۰}P(c)$ ، مقدار $P(b')$ را محاسبه کنید .	۱/۷۵
۱۵	نقطه ای به تصادف در داخل مربعی به ضلع ۴ انتخاب می کنیم ، مطلوب است احتمال اینکه فاصلهٔ این نقطه از هر رأس بیشتر از ۲ باشد .	۱/۷۵
۱۶	اگر احتمال وجود تلویزیون رنگی در یک خانه ۴۱٪ ، سیاه و سفید ۸۵٪ و از هر دو نوع ۳۲٪ باشد ، احتمال اینکه در این خانه لااقل یکی از دو نوع تلویزیون موجود باشد ، چقدر است؟	۱
	« موفق باشید » *جمع نمرات*	**۲۰**

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه (سالی – واحدی)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۱۰/۱۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت **دی ماه** سال ۱۳۸۳	کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه

ردیف	راهنمای تصحیح

۱

$$\begin{cases} P(1): 1\times 2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} \qquad 2=2 \qquad (0/25) \\ P(K): (1\times 2)+(2\times 3)+\ldots\ldots+K(K+1)=\dfrac{K(K+1)(K+2)}{3} \qquad (0/25) \end{cases}$$

حکم استقرا $P(K+1):(1\times 2)+(2\times 3)+\ldots+K(K+1)+(K+1)(K+2)=\dfrac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}(0/25)$

طرف چپ حکم $\dfrac{K(K+1)(K+2)}{3}+(K+1)(K+2) = \dfrac{K(K+1)(K+2)+3(K+1)(K+2)}{3}$

$$=\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3} \quad (0/75)$$

۲

$x=2k+1 \qquad y=2k'+1 \qquad (0/25)$

$x^2+y^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1 \quad (0/25)\Rightarrow$

$x^2+y^2=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2 \Rightarrow x^2+y^2=2\left(2k^2+2k'^2+2k+2k'+1\right) \quad (0/25)\Rightarrow$

$x^2+y^2=2k'' \quad (0/25)$

۳

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow \quad (0/25)$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$a^2+b^2+c^2+3-2a-2b-2c\geq 0 \Leftrightarrow \quad (0/25)$

$a^2+b^2+c^2+3\geq 2a+2b+2c \Leftrightarrow \quad (0/25)$

$a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c) \quad (0/25)$

۴

اگر $a^2+\sqrt{3}$ عدد گنگ نباشد پس گویاست یعنی $(0/25)$ $a^2+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q} \quad \begin{cases} p,q\in z \\ q\neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}-a^2\,(0/25)\Rightarrow \sqrt{3}=\dfrac{p-qa^2}{q}(0/25)\Rightarrow \sqrt{3}=\dfrac{a'}{q} \quad \begin{cases} a',q\in z \\ q\neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{3}$ یک عدد گویا شده که تناقض با فرض مسئله دارد پس حکم برقرار است یعنی $a^2+\sqrt{3}$ گنگ است. (۰/۲۵)

۵

$s=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_{70}\} \quad s\subseteq N$

$r=\{0,1,2,3,\ldots\ldots,29\} \quad (0/25)$

r مجموعه باقیمانده های هر عدد طبیعی بر ۳۰ است (با ۳۰ عضو)

هر گاه هر عضو s را به منزلهٔ یک کبوتر و هر عضو r را به منزلهٔ یک لانه کبوتر در نظر بگیریم

۷۰〉۳۰ پس طبق اصل لانهٔ کبوتر(۰/۲۵)

$$\begin{array}{r|l} 70 & 30 \\ \hline & 2 \end{array} \qquad 2+1=3 \quad (0/25)$$

پس حداقل ۳ عدد از این ۷۰ عدد دارای باقیماندهی یکسانی بر ۳۰ هستند . (۰/۲۵)

ادامه در صفحهی دوم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیز**
سال سوم آموزش متوسطه (سالی - واحدی)	تاریخ امتحان: ۳۸۳/۱۰/۱۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت **دی ماه** سال ۱۳۸۳	کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی

۶

$= \{۲,۹,۱۱,۱۳\}$ (۰/۲۵)

ب: $A \cap B = \{۳\}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (A \cap B)' = \{۲و۵و۷و۹و۱۱و۱۳\}$ (۰/۵)

پ: $A - B = \{۵,۷\}$ (۰/۲۵)

ت: $A \cup B = \{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}$ (۰/۲۵)

۷

اول طرف $= (A \cup B) - B$

$(A \cup B) \cap B' =$ (۰/۲۵)

$(A \cap B') \cup (B \cap B') =$ (۰/۲۵)

$(A \cap B') \cup \phi =$ (۰/۲۵)

$A \cap B' =$ (۰/۲۵)

دوم طرف $= A - B$

۸

$(x^۲ - y^۲, ۱۵) = (۱۶, xy)$

$\begin{cases} x^۲ - y^۲ = ۱۶ \Rightarrow x^۲ - \left(\frac{۱۵}{x}\right)^۲ = ۱۶ \quad x^۴ - ۱۶x^۲ - ۲۲۵ = ۰ \\ x.y = ۱۵ \Rightarrow y = \frac{۱۵}{x} \quad (۰/۲۵) \quad (x^۲ - ۲۵)(x^۲ + ۹) = ۰ \ (۰/۲۵) \end{cases}$

$x = +۵ \Rightarrow y = +۳$ (۰/۲۵)

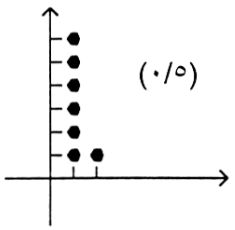
$x = -۵ \Rightarrow y = -۳$ (۰/۲۵)

۹

$a = ۱ \Rightarrow ۱(b+۱) \le ۱۰ \quad b \le ۹ \Rightarrow (۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۱,۶)$

$a = ۲ \Rightarrow ۴(b+۱) \le ۱۰ \quad b+۱ \le \frac{۵}{۲} \quad b \le \frac{۳}{۲} \Rightarrow (۲, ۱)$

$R = \{(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۱,۶), (۲,۱)\}$ (۰/۵)



۱۰

$xRx \Leftrightarrow x^۲ + x = x^۲ + x$ (۱) (۰/۲۵)

$\begin{cases} xRy \Rightarrow yRx \\ x^۲ + y = y^۲ + x \end{cases} \Rightarrow y^۲ + x = x^۲ + y$ (۲) (۰/۲۵)

$\begin{cases} xRy \ , \ yRZ \Rightarrow xRz \\ \begin{cases} x^۲ + y = y^۲ + x \\ y^۲ + z = z^۲ + y \end{cases} \end{cases}$ جمع می کنیم $\Rightarrow x^۲ + y + y^۲ + z = y^۲ + x + z^۲ + y$ (۰/۲۵)

$x^۲ + z = z^۲ + x$ (۳)

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می گیریم R یک رابطهٔ هم ارزی است . (۰/۲۵)

ادامه در صفحه‌ی سوم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه (سالی – واحدی)	تاریخ امتحان: **۱۳۸۳/۱۰/۱۷**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت **دی ماه** سال ۱۳۸۳	کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه

۱۱

الف : $S=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}$ (۰/۷۵)

ب: $A=\{۳,۹,۱۵\}$ (۰/۲۵)

پ: $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ (۰/۵)

ت: $A\cap B=\{۳,۹,۱۵\}\cap\{۱,۳,۵,۷,۹\}=\{۳,۹\}$ (۰/۵)

۱۲

۳+۴=۷

الف : هر دو مهره همرنگ یعنی هر دو سفید یا هر دو سیاه (۰/۲۵)

$$n(s)=\binom{۷}{۲}=۲۱ \quad (۰/۲۵)$$

$$n(A)=\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}=۹$$

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷} \quad (۰/۵)$$

ب : $n(B)=\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۱۲$

$$P(B)=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷} \quad (۰/۵)$$

۱۳

p(مجموع بیش از ۹)=p(مجموع ۱۰)+ p(مجموع ۱۱)+ p(مجموع ۱۲) (۰/۵)

$$\text{p(مجموع بیش از ۹)}=\frac{۳}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶} \quad (۰/۵)$$

۱۴

$P(c)=w \quad P(b)=\frac{۱}{۱۰}w \quad P(a)=\frac{۱}{۱۰۰}w$ (۰/۵) $P(a)+P(b)+P(c)=۱$ (۰/۲۵)

$\frac{۱}{۱۰۰}w+\frac{۱}{۱۰}w+w=۱$ (۰/۲۵) $w=\frac{۱۰۰}{۱۱۱}$ (۰/۲۵) $P(b)=\frac{۱}{۱۰}(\frac{۱۰۰}{۱۱۱})=\frac{۱۰}{۱۱۱}$ (۰/۲۵)

$P(b')=۱-P(b)=۱-\frac{۱۰}{۱۱۱}=\frac{۱۰۱}{۱۱۱}$ (۰/۲۵)

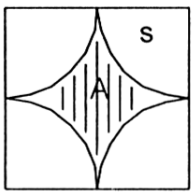
۱۵

$a(s)=۴\times۴=۱۶$ (۰/۲۵)

$a(A)=a(s)-a(\text{ربع دایره})$ ۴) $=a(s)-a(\text{دایره})$ (۰/۲۵)

$a(A)=۱۶-\pi(۲^۲)=۱۶-۴\pi$ (۰/۵)

$$P(A)=\frac{a(A)}{a(s)}=\frac{۱۶-۴\pi}{۱۶} \quad (۰/۵)$$



(۰/۲۵)

ادامه در صفحه‌ی چهارم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه (سالی – واحدی)	تاریخ امتحان: **۱۳۸۳/۱۰/۱۷**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت **دی ماه** سال **۱۳۸۳**	کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه

۱۶	$P(A)=۰/۴۱ \quad P(B)=۰/۸۵ \quad P(A\cap B)=۰/۳۲ \quad (۰/۲۵)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad (۰/۲۵)$ $P(A\cup B)=۰/۴۱+۰/۸۵-۰/۳۲ \quad (۰/۲۵)$ $P(A\cup B)=۰/۹۴ \quad (۰/۲۵)$
	مصححین محترم با عرض سلام و خسته نباشید لطفاً برای کلیه‌ی راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید . با تشکر

www.alm.loxblog.com